Точка максимума определяется условием $f'(x) = e^{-x}(1 - x) = 0$ и, так как $e^{-x} \neq 0$, получаем

$$x = 1 \left(f(1) = \frac{1}{e} \approx 0{,}3678795\right).$$

Точка перегиба определяется условием: $f''(x) = e^{-x}(x - 2) = 0$. Получаем

$$x = 2 \left(f(2) = \frac{2}{e^2} \approx 0{,}2706712\right).$$

Итоговая кривая распределения изображена на рис. 28.

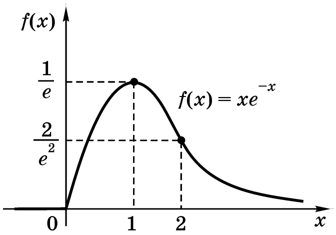

Рис. 28

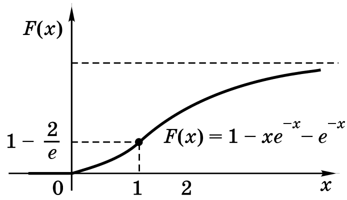

Рис. 29

При построении графика $F(x)$ (в нашем случае) важно найти точку перегиба, так как поведение $F(x)$ на концах промежутка известно: $F(0) = 0$;

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} (1 - xe^{-x} - e^{-x}) = 1$$

(горизонтальная асимптота $F = 1$ при $x \to +\infty$).

Перегиб исследуется с помощью второй производной, но $F''(x) = f'(x)$, так как $f(x) = F'(x)$ по определению. По графику $f(x)$ замечаем, что $f'(x) > 0$ при $0 < x < 1$ и $f'(x) < 0$ при $x > 1$. Поэтому $F(x)$ меняет выпуклость вниз на выпуклость вверх, имея перегиб при $x = 1$

$$\left(F(1) = 1 - \frac{2}{e} \approx 0{,}264241\right).$$

График $F(x)$ приведен на рис. 29.

4. При вычислении асимметрии и эксцесса потребуется взять по частям несколько интегралов. Приведем эти результаты заранее:

$$\int x^2e^{-x}dx=-e^{-x}(x^2+2x+2)+c;$$
$$\int x^3e^{-x}dx=-e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)+c;$$
$$\int x^4e^{-x}dx=-e^{-x}(x^4+4x^3+12x^2+24x+24)+c;$$
$$\int x^5e^{-x}dx=-e^{-x}(x^5+5x^4+20x^3+60x^2+120x+120)+c.$$

Кроме того, придется вычислять несколько пределов вида

$$\lim_{\beta\to+\infty} e^{-\beta}\cdot Q(\beta),$$

где $Q(\beta)$ — многочлен. Все такие пределы равны нулю по правилу Лопиталя, поэтому значения несобственных интегралов оказываются равными свободным членам из формул соответствующих неопределенных интегралов, например:

$$\int_0^\infty x^2e^{-x}dx=$$
$$=\lim_{\beta\to+\infty}(-e^{-x}(x^2+2x+2))\Big|_0^\beta \lim_{\beta\to+\infty}[-e^{-\beta}(\beta^2+2\beta+2)+2]=2.$$

В итоге получаем

$$\int_0^\infty x^2e^{-x}dx=2;\quad \int_0^\infty x^3e^{-x}dx=6;\quad \int_0^\infty x^4e^{-x}dx=24;\quad \int_0^\infty x^5e^{-x}dx=120.$$

Проведем предварительные вычисления.

Известно, что $\mu_3=M[(X-M(X))^3]$; $\mu_4=M[(X-M(X))^4]$, а нормированные коэффициенты

$$\alpha_3=\mu_3/\sigma_x^3;\quad \alpha_4=\mu_4/\sigma_x^4-3.$$

Поэтому сначала необходимо найти $M(X)$ и $\sigma(X)$:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_0^\infty x^2e^{-x}dx=2;$$
$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx=\int_0^\infty x^3e^{-x}dx=6;$$
$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=6-4=2;\quad \sigma_x=\sqrt{D(X)}=\sqrt{2}.$$

Найдем асимметрию:

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^3 f(x)dx = \int_{0}^{\infty}(x-2)^3 xe^{-x}dx =$$

$$= \int_{0}^{\infty}(x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x)e^{-x}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{линейность} \\ \text{интеграла} \end{matrix} \right| = \int_{0}^{\infty}x^4 e^{-x}dx - 6\int_{0}^{\infty}x^3 e^{-x}dx + 12\int_{0}^{\infty}x^2 e^{-x}dx -$$

$$-8\int_{0}^{\infty}f(x)dx = 24 - 36 + 24 - 8 = 4.$$

Асимметрия $\mu_3 = 4$, а ее нормированный коэффициент $\alpha_3 = \mu_3 / \sigma_x^3 = \frac{4}{(\sqrt{2})^3} = \sqrt{2}$. Видим, что $\mu_3 > 0$, т. е. кривая распределения имеет «хвост» справа, что и подтверждается графиком плотности вероятности $f(x)$ (см. рис. 28).

Найдем эксцесс:

$$\mu_4 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^4 f(x)dx = \int_{0}^{\infty}(x-2)^4 xe^{-x}dx =$$

$$= \int_{0}^{\infty}(x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 32x^2 + 16x)e^{-x}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{аналогично} \\ \text{расчету } \mu_3 \end{matrix} \right| = 120 - 192 + 144 - 64 + 16 = 24.$$

Эксцесс $\mu_4 = 24$, а его нормированный коэффициент

$$\alpha_4 = \mu_4 / \sigma_x^4 - 3 = 24/4 - 3 = 3 > 0.$$

Значит, кривая плотности вероятности $f(x)$ в данном примере является более островершинной, чем кривая нормального распределения.

ЗАДАЧА С СОСТАВНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ВЕРОЯТНОСТИ

В задачах третьего типа $f(x)$ называется составной, так как на промежутке, где $f(x) \neq 0$, она задается двумя различными формулами. Кроме того, даны числа α и β, определяющие интервал на числовой прямой.

Требуется:

1) проверить свойство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;

2) построить график $f(x)$;

3) найти функцию распределения $F(x)$;

4) найти $P(\alpha \le X \le \beta)$;

5) найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решим такую задачу.

П р и м е р. Дано:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 4-(x-2)^2, & 0 < x \le 2; \\ (x-3)^2+3, & 2 < x \le 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

$$\alpha = -3; \quad \beta = 1.$$

Решение.

1.
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{2}(-x^2+4x)dx +$$
$$+\int\limits_{2}^{3}(x^2-6x+12)\ dx + \int\limits_{3}^{\infty} 0\ dx =$$
$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 12x\right)\Bigg|_2^3 = \frac{26}{3} \ne 1.$$

Таким образом, свойство 2 плотности вероятности для заданной $f(x)$ не выполняется, поэтому необходимо умножить $f(x)$ на нормирующий множитель $a = 3/26$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{3}{26}(-x^2+4x), & 0 < x \le 2; \\ \frac{3}{26}(x^2-6x+12), & 2 < x \le 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Новая $f(x)$ может считаться плотностью вероятности, ибо $f(x) \ge 0$, в чем убедимся при построении кривой распределения.

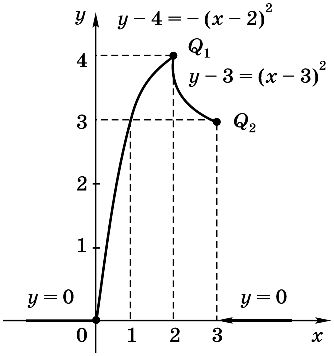

Рис. 30

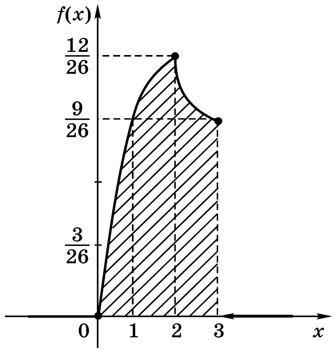

Рис. 31

2. Удобнее построить сначала более простой график исходной $f(x)$, а затем изменить масштаб по оси $y = f(x)$. График $f(x)$ (рис. 30) состоит из четырех участков, задаваемых разными уравнениями:

а) при $x \le 0$ $y = 0$, т. е. нулевая постоянная;

б) при $0 < x \le 2$ $y = 4 - (x-2)^2$ или $(y-4) = -(x-2)^2$ — парабола типа $y = -x^2$ с вершиной, смещенной в точку $Q_1(2, 4)$;

в) при $2 < x \le 3$ $y = (x-3)^2 + 3$ или $(y-3) = (x-3)^2$ — парабола типа $y = x^2$ с вершиной в точке $Q_2(3, 3)$;

г) при $x > 3$ $y = 0$, т. е. опять нулевая постоянная.

«Настоящая» плотность вероятности, с учетом масштабного множителя $a = 3/26$, изображена на рис. 31. По сути дела, изменена только шкала по оси ординат. Площадь под кривой равна единице.

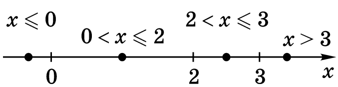

Рис. 32

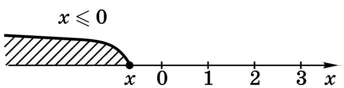

Рис. 33

3. Находим $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Строим схему основных положений точки x (рис. 32).

Четыре положения точки x, соответствующие разбиению оси абсцисс на интервалы, дадут четыре формулы:

а) случай $x \le 0$. Интегрируем на промежутке, заштрихованном на рис. 33, и имеем

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0;$$

б) случай $0 < x \le 2$. Получаем сумму двух интегралов (рис. 34):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \frac{3}{26}\int_{0}^{x}(-x^2 + 4x)dx = \frac{3}{26}\left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_{0}^{x} =$$

$$= \frac{1}{26}(-x^3 + 6x^2);$$

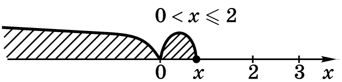

Рис. 34

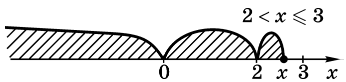

Рис. 35

в) случай $2 < x \le 3$. Имеем сумму трех интегралов (рис. 35):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \frac{3}{26}\int_{0}^{2}(-x^2 + 4x)\,dx + \frac{3}{26}\int_{2}^{x}(x^2 - 6x + 12)dx =$$

$$= \frac{3}{26}\left[\left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_{0}^{2} + \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 12x\right)\Bigg|_{2}^{x}\right] =$$

$$= \frac{1}{26}(x^3 - 9x^2 + 36x - 28);$$

г) случай $x > 3$ соответствует рис. 36, но $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$ где $x > 3$, дает всю площадь под кривой распределения (см. рис. 31) и равен единице: $F(x) = 1$.

В итоге получаем функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{26}(-x^3 + 6x^2), & 0 < x \le 2; \\ \dfrac{1}{26}(x^3 - 9x^2 + 36x - 28), & 2 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

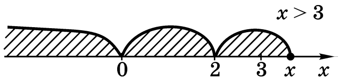

Рис. 36

4. Известно, что $P(\alpha \le X \le \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Поэтому

$$P(-3 \le X \le 1) = \int\limits_{-3}^{1} f(x)dx = \int\limits_{-3}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{3}{26}(-x^2 + 4x)dx =$$

$$= 0 + \frac{3}{26}\left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{26} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{26}.$$

5. Находим числовые характеристики случайной величины X:

а) $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$. Отбрасывая крайние интегралы разложения, равные нулю, получим

$$M(X) = \frac{3}{26}\left[\int\limits_0^2 x(-x^2 + 4x)dx + \int\limits_2^3 x(x^2 - 6x + 12)dx\right] =$$

$$= \frac{3}{26}\left[\left(-\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 6x^2\right)\Bigg|_2^3\right] =$$

$$= \frac{3}{26}\left[\left(-4 + \frac{32}{3}\right) + \left(\frac{81}{4} - 54 + 54\right) - (4 - 16 + 24)\right] =$$

$$= \frac{3}{26} \cdot \frac{179}{12} = \frac{179}{104} \approx 1{,}7211538;$$

б) аналогично, отбрасывая нулевые слагаемые, получаем

$$M(X^2) = \frac{3}{26}\left[\int\limits_0^2 x^2(-x^2 + 4x)dx + \int\limits_2^3 x^2(x^2 - 6x + 12)dx\right] =$$

$$= \frac{3}{26}\left[\left(-\frac{x^5}{5} + x^4\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}x^4 + 4x^3\right)\Bigg|_2^3\right] =$$

$$= \frac{3}{26} \cdot \frac{303}{10} = \frac{909}{260} \approx 3{,}496158.$$

Есть смысл перейти к приближенным вычислениям, ибо в случае громоздких дробей преимущество точного ответа исчезает:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 \approx$$
$$\approx 3,4961588 - 2,9623704 = 0,5337884;$$

в) $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx 0,7306082.$

Если для соответствующих инженерных приложений непрерывной случайной величины X достаточна точность 10^{-4}, то ответы будут следующие:

$$M(X) \approx 1,7212;$$
$$D(X) \approx 0,5338; \ \sigma(X) \approx 0,7306.$$

6.7. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА

ЗАДАНИЯ С ИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Дана функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X.

Требуется:

1) найти плотность вероятности $f(x)$;
2) построить графики $F(x)$ и $f(x)$;
3) найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$;
4) найти $P(\alpha < X < \beta)$ для данных α, β.

Вариант 1.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 3x^2 + 2x, & 0 < x \le \dfrac{1}{3}; \\ 1, & x > \dfrac{1}{3}; \end{cases}$$

$\alpha = 0,1; \ \ \beta = 0,5.$

Вариант 2.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{2}(1 - \cos x), & 0 < x \le \pi; \\ 1, & x > \pi; \end{cases}$$

$\alpha = 0; \ \ \beta = \dfrac{\pi}{2}.$

Вариант 3.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{100}, & 0<x\le 10;\\ 1, & x>10; \end{cases}$$

$\alpha=2;\ \ \beta=5.$

Вариант 4.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1;\\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}, & -1<x\le \dfrac{1}{3};\\ 1, & x>\dfrac{1}{3}; \end{cases}$$

$\alpha=-0{,}5;\ \ \beta=0.$

Вариант 5.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ x, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1; \end{cases}$$

$\alpha=0{,}3;\ \ \beta=0{,}7.$

Вариант 6.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{9}, & 0<x\le 3;\\ 1, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=1;\ \ \beta=2.$

Вариант 7.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \sin 3x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{6};\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{6}; \end{cases}$$

$\alpha=0;\ \ \beta=\dfrac{\pi}{12}.$

Вариант 8.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le \dfrac{\pi}{2};\\ -2\cos x, & \dfrac{\pi}{2}<x\le \dfrac{2\pi}{3};\\ 1, & x>\dfrac{2\pi}{3}; \end{cases}$$

$\alpha=\dfrac{\pi}{2};\ \ \beta=\dfrac{3\pi}{2}.$

Вариант 9.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \sin 2x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4};\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$\alpha=-1;\ \ \beta=\dfrac{\pi}{6}.$

Вариант 10.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{16}, & 0<x\le 4;\\ 1, & x>4; \end{cases}$$

$\alpha=1;\ \ \beta=3.$

Вариант 11.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2; \\ \dfrac{x^2-4}{5}, & 2<x\le 3; \\ 1, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=2;\quad \beta=2{,}5.$

Вариант 12.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \sin x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$\alpha=0;\quad \beta=\dfrac{\pi}{6}.$

Вариант 13.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{x^2}{25}, & 0<x\le 5; \\ 1, & x>5; \end{cases}$$

$\alpha=1;\quad \beta=3.$

Вариант 14.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le \dfrac{\pi}{6}; \\ -\cos 3x, & \dfrac{\pi}{6}<x\le \dfrac{\pi}{3}; \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{3}; \end{cases}$$

$\alpha=\dfrac{\pi}{6};\quad \beta=\dfrac{\pi}{4}.$

Вариант 15.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ \dfrac{1}{2}(x^2-x), & 1<x\le 2; \\ 1, & x>2; \end{cases}$$

$\alpha=1{,}2;\quad \beta=1{,}5.$

Вариант 16.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, & -2<x\le 2; \\ 1, & x>2; \end{cases}$$

$\alpha=-1;\quad \beta=1.$

Вариант 17.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{x^2+\ x}{2}, & 0<x\le 1; \\ 1, & x>1; \end{cases}$$

$\alpha=0{,}3;\quad \beta=0{,}6.$

Вариант 18.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le \dfrac{3\pi}{4}; \\ \cos 2x, & \dfrac{3\pi}{4}<x\le \pi; \\ 1, & x>\pi; \end{cases}$$

$\alpha=\dfrac{3\pi}{4};\quad \beta=\dfrac{3\pi}{2}.$

Вариант 19.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -\dfrac{\pi}{2}; \\ \cos x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0; \\ 1, & x>0; \end{cases}$$

$\alpha=-\dfrac{\pi}{2};\ \ \beta=-\dfrac{\pi}{6}.$

Вариант 20.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ 2\sin x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{6}; \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{6}; \end{cases}$$

$\alpha=0;\ \ \beta=\dfrac{\pi}{4}.$

Вариант 21.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{x}{4}, & 0<x\le 4; \\ 1, & x>4; \end{cases}$$

$\alpha=-1;\ \ \beta=3.$

Вариант 22.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2; \\ 1, & x>2; \end{cases}$$

$\alpha=1;\ \ \beta=1{,}5.$

Вариант 23.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{x^2}{2}\left(1-\dfrac{x^2}{8}\right), & 0<x\le 2; \\ 1, & x>2; \end{cases}$$

$\alpha=-\dfrac{1}{2};\ \ \beta=1.$

Вариант 24.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2; \\ \dfrac{1}{2}x-1, & 2<x\le 4; \\ 1, & x>4; \end{cases}$$

$\alpha=-\dfrac{\pi}{2};\ \ \beta=-\dfrac{\pi}{6}.$

Вариант 25.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1; \\ \dfrac{x^2-1}{3}, & 1<x\le 2; \\ 1, & x>2; \end{cases}$$

$\alpha=1;\ \ \beta=1{,}5.$

Вариант 26.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{2}, & -2<x\le 2; \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

$\alpha=-1;\ \ \beta=2.$

Вариант 27.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}\log_2(x+1), & 0<x\le 3;\\ 1, & x>3;\end{cases}$$

$\alpha=0;\quad \beta=1.$

Вариант 28.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 2^x-1, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1;\end{cases}$$

$\alpha=-\dfrac{2}{3};\quad \beta=\dfrac{2}{3}.$

Вариант 29.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{e^x-1}{e-1}, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1;\end{cases}$$

$\alpha=0;\quad \beta=\dfrac{1}{2}.$

Вариант 30.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{9-(4-x)^2}{9}, & 1<x\le 4;\\ 1, & x>4;\end{cases}$$

$\alpha=2;\quad \beta=3.$

ЗАДАНИЯ С ИЗВЕСТНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ВЕРОЯТНОСТИ

Дана плотность вероятности $f(x)$ непрерывной случайной величины X.

Требуется:

1) найти параметр a;
2) найти функцию распределения $F(x)$;
3) построить графики $f(x)$ и $F(x)$;
4) найти асимметрию и эксцесс X.

Вариант 1.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{a}{3}\sin x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{3};\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

Вариант 2.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<2;\\ a(x-2)(4-x), & 2\le x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Вариант 3.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a(4x+3), & 0\le x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Вариант 4.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a\cos 2x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{4}; \\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Вариант 5.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ ax, & 1\le x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Вариант 6.

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2}, \quad x\in R.$$

Вариант 7.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ a(2x-1), & 1\le x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Вариант 8.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a(8x^2+4x), & 0\le x\le \dfrac{1}{3}; \\ 0, & x>\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Вариант 9.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-2\sqrt{2}; \\ \dfrac{a}{\pi\sqrt{16-x^2}}, & -2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2}; \\ 0, & x>2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Вариант 10.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a\cdot\sin x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вариант 11.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<2; \\ a(x-2), & 2\le x\le 3; \\ 0, & x>3. \end{cases}$$

Вариант 12.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a\cdot\sin 2x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вариант 13.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ ax, & 1\le x\le 3;\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Вариант 14.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ axe^{-x^2}, & x>0.\end{cases}$$

Вариант 15.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ a(2x+1), & 0\le x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Вариант 16.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-2;\\ \dfrac{a}{\sqrt{4-x^2}}, & -2\le x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Вариант 17.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ a(4x-x^3), & 0\le x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Вариант 18.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-3;\\ \dfrac{a}{\sqrt{9-x^2}}, & -3\le x\le 3;\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Вариант 19.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ a(4x-1), & 0\le x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Вариант 20.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ ax, & 0\le x\le \dfrac{1}{3};\\ 0, & x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

Вариант 21.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ a(1-x), & 0\le x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Вариант 22.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<2;\\ a(6x^2-x-3), & 2\le x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Вариант 23.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\\ \dfrac{1}{a\sqrt{1-x^2}}, & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le x\le \dfrac{\sqrt{2}}{2};\\ 0, & x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

Вариант 24.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{a}{x^4}, & x>1.\end{cases}$$

Вариант 25.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ a(x^2+2x), & 0\le x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Вариант 26.

$$f(x)=\frac{a}{1+4x^2},\quad x\in R.$$

Вариант 27.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ a(4x-x^2), & 0\le x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Вариант 28.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le \frac{\pi}{2};\\ a\cdot\cos^2 x, & -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2};\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Вариант 29.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<3;\\ a(x-3)(7-x), & 3\le x\le 7;\\ 0, & x>7.\end{cases}$$

Вариант 30.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ a\left(1-\frac{x}{3}\right), & 0\le x\le 3;\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

ЗАДАНИЯ С СОСТАВНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ВЕРОЯТНОСТИ

Дана плотность вероятности $f(x)$ непрерывной случайной величины X, имеющая две ненулевые составляющие формулы.

Требуется:

1) проверить свойство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1;$
2) построить график $f(x)$;
3) найти функцию распределения $F(x)$;
4) найти $P(\alpha\le X\le\beta)$ для данных α, β;
5) найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Вариант 1.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{x}{8}, & 0<x\le 2;\\ 1, & 2<x\le\frac{11}{4};\\ 0, & x>\frac{11}{4};\end{cases}$$

$\alpha=1;\quad \beta=2{,}5.$

Вариант 2.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x, & 0<x\le 1;\\ -x+2, & 1<x\le 2;\\ 0, & x>2;\end{cases}$$

$\alpha=-1;\quad \beta=1{,}5.$

Вариант 3.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \frac{2}{3}x, & 0<x\le 1; \\ \frac{3-x}{3}, & 1<x\le 3; \\ 0, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=\frac{2}{3}$; $\beta=2$.

Вариант 4.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \frac{1}{3}(x-1), & 1<x\le 3; \\ -\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}, & 3<x\le 4; \\ 0, & x>4; \end{cases}$$

$\alpha=0$; $\beta=2{,}5$.

Вариант 5.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ \frac{x+2}{4}, & -2<x\le 0; \\ \frac{-x+2}{4}, & 0<x\le 2; \\ 0, & x>2; \end{cases}$$

$\alpha=-1$; $\beta=0{,}5$.

Вариант 6.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1; \\ \frac{1}{2}, & -1<x\le 0; \\ \frac{1}{2}-\frac{x}{4}, & 0<x\le 2; \\ 0, & x>2; \end{cases}$$

$\alpha=-0{,}5$; $\beta=1$.

Вариант 7.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ \frac{3}{16}(x+2)^2, & -2<x\le 0; \\ \frac{3}{16}(x-2)^2, & 0<x\le 2; \\ 0, & x>2; \end{cases}$$

$\alpha=-3$; $\beta=0$.

Вариант 8.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ \frac{3}{2}(x+2)^2, & -2<x\le -1; \\ \frac{3}{2}x^2, & -1<x\le 0; \\ 0, & x>0; \end{cases}$$

$\alpha=-0{,}6$; $\beta=-0{,}4$.

Вариант 9.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1; \\ \frac{3}{20}(x+1)^2, & -1<x\le 1; \\ \frac{3}{20}(6-2x), & 1<x\le 3; \\ 0, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=0$; $\beta=2$.

Вариант 10.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ \frac{3x+6}{28}, & -2<x\le 2; \\ \frac{3}{7}(x-3)^2, & 2<x\le 3; \\ 0, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=0$; $\beta=3$.

Вариант 11.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 3;\\ \frac{1}{4}(x-3), & 3<x\le 5;\\ \frac{1}{2}, & 5<x\le 6;\\ 0, & x>6; \end{cases}$$

$\alpha=4;\ \ \beta=5{,}5.$

Вариант 12.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1;\\ \frac{2}{3}(x-1), & 1<x\le 2{,}5;\\ 6-2x, & 2{,}5<x\le 3;\\ 0, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=0;\ \ \beta=2{,}5.$

Вариант 13.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \frac{2}{15}x, & 0<x\le 3;\\ -\frac{1}{5}x+1, & 3<x\le 5;\\ 0, & x>5; \end{cases}$$

$\alpha=1;\ \beta=4.$

Вариант 14.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1;\\ \frac{1}{4}(x+1), & -1<x\le 1;\\ \frac{1}{4}(3-x), & 1<x\le 3;\\ 0, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=-1;\ \beta=2.$

Вариант 15.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -6;\\ \frac{1}{9}(x+6), & -6<x\le -3;\\ -\frac{x}{9}, & -3<x\le 0;\\ 0, & x>0; \end{cases}$$

$\alpha=-5;\ \ \beta=1.$

Вариант 16.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1;\\ \frac{2}{9}, & 1<x\le 4;\\ \frac{2}{27}(7-x), & 4<x\le 7;\\ 0, & x>7; \end{cases}$$

$\alpha=0;\ \ \beta=5.$

Вариант 17.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \frac{3}{20}x^2, & 0<x\le 2;\\ \frac{3}{5}, & 2<x\le 3;\\ 0, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=1;\ \ \beta=2{,}5.$

Вариант 18.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2;\\ \frac{3}{10}(x-2)^2, & 2<x\le 3;\\ \frac{3}{10}, & 3<x\le 6;\\ 0, & x>6; \end{cases}$$

$\alpha=0;\ \ \beta=4.$

Вариант 19.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1; \\ \dfrac{1}{4}, & -1<x\le 2; \\ \dfrac{1}{36}(x-5)^2, & 2<x\le 5; \\ 0, & x>5; \end{cases}$$

$\alpha=1$; $\beta=3$.

Вариант 20.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ \dfrac{3}{16}, & -2<x\le 3; \\ \dfrac{3}{16}(x-4)^2, & 3<x\le 4; \\ 0, & x>4; \end{cases}$$

$\alpha=-1$; $\beta=4$.

Вариант 21.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{2}{5}x, & 0<x\le 1; \\ \dfrac{2}{5}, & 1<x\le 3; \\ 0, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=0{,}5$; $\beta=1{,}5$.

Вариант 22.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -3; \\ \dfrac{1}{27}(x+3)^2, & -3<x\le 0; \\ \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12}x, & 0<x\le 4; \\ 0, & x>4; \end{cases}$$

$\alpha=-2$; $\beta=2$.

Вариант 23.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2; \\ \dfrac{3}{32}(x+2), & -2<x\le 2; \\ \dfrac{3}{32}(x-4)^2, & 2<x\le 4; \\ 0, & x>4; \end{cases}$$

$\alpha=-3$; $\beta=3$.

Вариант 24.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{x^2}{12}, & 0<x\le 3; \\ \dfrac{3}{4}(x-4)^2, & 3<x\le 4; \\ 0, & x>4; \end{cases}$$

$\alpha=1$; $\beta=2$.

Вариант 25.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{1}{8}x^2, & 0<x\le 2; \\ \dfrac{1}{32}(x-6)^2, & 2<x\le 6; \\ 0, & x>6; \end{cases}$$

$\alpha=2$; $\beta=5$.

Вариант 26.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 3; \\ \dfrac{2}{3}, & 3<x\le 4; \\ \dfrac{10}{3}-\dfrac{2}{3}x, & 4<x\le 5; \\ 0, & x>5; \end{cases}$$

$\alpha=0$; $\beta=4{,}5$.

Вариант 27.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2;\\ \frac{1}{27}(x+2), & -2<x\le 4;\\ \frac{2}{9}, & 4<x\le \frac{11}{2};\\ 0, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=-1;\quad \beta=10.$

Вариант 28.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1;\\ \frac{3}{88}(x-1)^2, & 1<x\le 5;\\ \frac{3}{11}, & 5<x\le 6;\\ 0, & x>6; \end{cases}$$

$\alpha=0;\quad \beta=4.$

Вариант 29.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1;\\ \frac{3}{8}, & -1<x\le 1;\\ \frac{3}{32}\ (x-3)^2, & 1<x\le 3;\\ 0, & x>3; \end{cases}$$

$\alpha=0{,}5;\ \beta=3.$

Вариант 30.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -5;\\ -\frac{2}{11}x, & -5<x\le 0;\\ \frac{1}{33}x, & 0<x\le 4;\\ 0, & x>4; \end{cases}$$

$\alpha=-3;\quad \beta=3.$

ГЛАВА 7

ВАЖНЕЙШИЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ СВОЙСТВА

Среди непрерывных случайных величин, свойства и характеристики которых рассмотрены в шестой главе, простейшими и в то же время наиболее важными являются величины, имеющие нормальное, экспоненциальное или равномерное распределение. Нормальный закон распределения описывает явления, широко распространенные в природе и технике и возникающие при наложении друг на друга многочисленных случайных воздействий, среди которых нет доминирующих по интенсивности. Экспоненциальный закон описывает время безотказной работы технических устройств и может быть применен при оценке их надежности. Равномерное распределение является базовым при генерации случайных величин на компьютере, так как стандартные датчики случайных чисел дают числа, равномерно распределенные на интервале (0; 1). Равномерно распределены также случайные ошибки измерения физических величин приборами, имеющими шкалы с делениями.

Рассмотрим подробнее применение случайных величин в технических специальностях. Будущим инженерам-электрикам (электромеханикам) полезно обратить внимание на следующие примеры.

1. Электрические нагрузки вводов 27,5 или 10,5 кВ тяговых подстанций никогда не бывают известны точно, а изменяются в широком диапазоне случайным образом. Это объективно обусловлено ходом технологического процесса (перевозкой грузов и пассажиров) и влиянием пи-

тающих энергосистем. Следствием этого является случайное изменение всех параметров режима тяговой подстанции, например напряжения, и загрузки ее силовых элементов (трансформаторов, преобразователей и др.).

2. Напряжение в контактной сети, присоединенной к тяговой подстанции, с учетом предыдущего примера имеет случайное отклонение от номинального значения, поэтому напряжение на пантографе электровоза — величина случайная.

3. Система тягового электроснабжения содержит большое количество элементов — линий электропередач, трансформаторов, преобразователей, реакторов, выключателей и т. д. В структуре системы электроснабжения они включены последовательно и(или) параллельно и имеют свои характеристики надежности, в частности, вероятности безотказной работы, поэтому надежность всей системы электроснабжения изменяется случайным образом.

Поскольку отмеченные выше случайные параметры используются в проектных расчетах и при эксплуатации, знание случайных величин и законов их распределения важно для инженеров-электриков.

Инженерам — специалистам по разработке и эксплуатации электрических машин — важно учесть многочисленные факторы, воздействующие на процесс коммутации. По физике воздействия на процесс коммутации эти факторы объединяют в группы, т. е. агрегируют в некоторые обобщенные параметры, допустимые границы изменения которых определяются как условиями коммутации, так и производственными допусками. В общем случае эти обобщенные параметры являются случайными величинами. Следовательно, процесс коммутации носит вероятностный характер и для его изучения требуется умение работать с такими числовыми характеристиками случайных величин, как математическое ожидание и дисперсия.

Для будущих инженеров, обслуживающих железнодорожный подвижной состав (электровозы, тепловозы, вагоны), важнейшей проблемой является проблема взаимодействия подвижного состава и пути. Неровности пути описываются как случайные процессы (т. е. случайные величины, изменяющиеся во времени). Например, при исследовании прохождения колебаний через систему подвески можно выделить три основных элемента: неровность (или входной сигнал), систему подвески (или преобразователь сигнала) и колебания, передаваемые на экипажную часть (или выходной сигнал). По двум из основных элементов инженер-механик определяет параметры третьего (неизвестного) элемента.

1. Если известны входной и выходной случайные процессы, то можно решить задачу о свойствах подвески, а значит, и о ее конструкции.

2. Если известны входной случайный процесс и свойства подвески, то можно предсказать колебания подвижного состава и, следовательно, решить задачу о режимах ведения поезда по данному участку пути.

3. На знании свойств подвески и выходного случайного процесса основано устройство измерителя неровностей пути (т. е. измерителя входного случайного процесса).

Все три перечисленные задачи решаются с помощью математического аппарата спектральных плотностей, предполагающего знание раздела «Случайные величины и случайные процессы».

В современных средствах передачи информации широко распространены цифровое кодирование и дискретная форма передачи информации. При этом информация защищена от использования несанкционированными получателями, но вовсе не обязательно защищена от помех, которые могут быть нормальными (инородными для сообщения шумами) или аномальными (вызванными аномальным состоянием среды и дифракцией исходного сообщения на несколько накладывающихся друг на друга частей или копий). Характер помех, как правило, случайный и описывается случайными величинами, поэтому их знание пригодится инженеру-связисту при исследовании помехозащищенности одно- и многоканальных систем передачи информации.

Подводя общие итоги, отметим, что, с одной стороны, большинство объектов железнодорожного транспорта выпускаются и эксплуатируются большими сериями, имея при этом определенный исходный разброс характеристик, разные условия эксплуатации и разный износ, поэтому при изучении этих объектов приходится иметь дело со статистическими распределениями, т. е. со случайными величинами. Измерение характеристик реальных объектов непременно связано с погрешностью измерений, увеличивающей случайность получаемых результатов, а эксплуатация сложных электрических систем всегда осложнена наличием в них посторонних шумов и помех, носящих чаще всего случайный характер. Надежность объектов железнодорожного транспорта, имеющих, как правило, сложную структуру из многочисленных взаимосвязанных элементов, описывается также на языке случайных величин.

С другой стороны, любое научное исследование технических систем направлено на их улучшение, на оптимизацию их характеристик, поэтому необходимо отметить, что в математических методах оптимизации важное место занимают случайные величины. Среди методов ненаправленного поиска (применяемых на начальной стадии оптимизации с целью сужения множества допустимых конструкций) получил известность метод случайного поиска. На последующих этапах оптимизации используются прямые методы направленного поиска (в них проверяется несколько направлений улучшения исходной конструкции и делается «шаг» в наилучшем направлении). При этом хорошие результаты дают стохастические методы прямого поиска, в которых применяется случайный способ выбора проверяемых направлений (например, равномерное распределение точек на многомерной сфере). Наконец, большинство инженерных задач оптимизации являются многокритериальными (т. е. требуется улучшить сразу несколько характеристик технической системы). При их решении получается так называемое множество Парето (довольно широкое множество конструкций, у которых улучшение одной из характеристик приводит к обязательному ухудшению другой). В качестве критерия выбора наилучшей технической системы из множества Парето в современной литературе предлагается критерий вероятности безотказной работы объекта, но использование этого критерия связано с учетом вероятностного характера параметров технической системы и с применением метода статистических испытаний Монте-Карло, т. е. приводит к работе со случайными величинами.

Таким образом, использование аппарата случайных величин буквально «пронизывает» современные прикладные инженерные исследования, и знание этого раздела высшей математики необходимо каждому инженеру.

7.1. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Непрерывная случайная величина X имеет *равномерное распределение на отрезке* $[a, b]$, если ее плотность вероятности $f(x)$ на этом отрезке постоянна и имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad x\in[a,b];\\ 0 & \text{при} \quad x\notin[a,b].\end{cases} \qquad (36)$$

Площадь под кривой равномерного закона (рис. 37) имеет вид прямоугольника, опирающегося на отрезок $[a, b]$; в связи с этим равномерное распределение иногда называют *«прямоугольным»*.

Введем обозначение $I(a, b)$ для множества непрерывных случайных величин, равномерно распределенных на отрезке $[a, b]$. Тогда случайная величина X, равномерно распределенная на $[a, b]$, будет обозначаться как $X \in I(a, b)$. Таким образом, у равномерно распределенной случайной величины имеется *два параметра*, однозначно задающих ее закон распределения: a — *левая граница* и b — *правая граница* соответствующего отрезка.

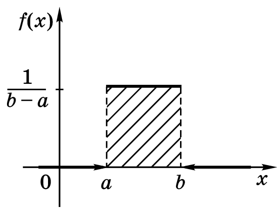

Рис. 37

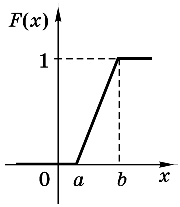

Рис. 38

Функция распределения для $X \in I(a,\, b)$ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a < x \le b; \\ 1 & \text{при} \quad x > b. \end{cases} \tag{37}$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 38. На отрезке распределения возможных значений случайной величины X этот график является наклонной прямой, задаваемой уравнением: $y = (x - a)/(b - a)$.

Числовые характеристики непрерывной случайной величины $X \in I(a,\, b)$ определяются по параметрам распределения по формулам:

$$M(X)=\frac{a+b}{2}; \tag{38}$$

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}; \tag{39}$$

$$\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}, \tag{40}$$

что легко можно проверить, вычислив соответствующие интегралы (см. гл. 6 пп. 6.2, 6.3).

Примером физических условий, при которых возникает равномерное распределение, может служить процесс измерения некоторой физической величины U с помощью прибора с грубыми делениями. При этом приходится округлять значение U до целого деления, и возникает ошибка измерения. В качестве приближенного значения $\tilde{U}$ величины U можно брать:

1) $\tilde{U} = \{\text{ближайшее целое к } U\}$;

2) $\tilde{U} = \{\text{ближайшее целое, меньшее } U\} = [U]$;

3) $\tilde{U} = \{\text{ближайшее целое, большее } U\} = [U]$.

Пусть X — ошибка измерения: $X = U - \tilde{U}$. Тогда случайная величина X распределена по равномерному закону, причем в каждом варианте округления U получаются разные параметры распределения ошибки X:

1) $X \in I(-0{,}5;\, 0{,}5)$;

2) $X \in I(0;\, 1)$;

3) $X \in I(-1;\, 0)$.

При моделировании на компьютере различных случайных величин и случайных процессов исходными данными являются значения случайной величины $X \in I(0, 1)$. Такую величину называют «*случайным числом от 0 до 1*», а вырабатывается она специальными подпрограммами-генераторами, встроенными в прикладное программное обеспечение. Таким образом, равномерное распределение служит *основным, базовым* для построения всех других распределений.

7.2. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Говорят, что непрерывная случайная величина X имеет *экспоненциальное* (*показательное*) распределение, если ее плотность вероятности $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x > 0; \\ 0 & \text{при} \quad x \le 0. \end{cases} \tag{41}$$

График $f(x)$, или кривая экспоненциального распределения, изображен на рис. 39, причем величина $\lambda > 0$ и называется *параметром экспоненциального распределения*.

Введем обозначение $E(\lambda)$ для множества случайных величин, имеющих экспоненциальное распределение с параметром λ. Параметр λ имеет физический смысл *интенсивности* процессов, описываемых экспоненциальным законом распределения, а соответствующая случайная величина будет обозначаться как $X \in E(\lambda)$. Таким образом, простейший вариант показательного закона распределения однозначно задается *одним параметром* λ — *интенсивностью распределения*.

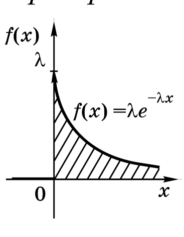

Рис. 39

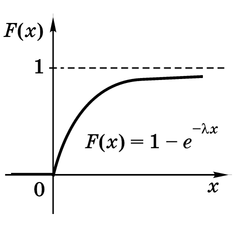

Рис. 40

Функция распределения для $X \in E(\lambda)$ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x>0;\\ 0 & \text{при} \quad x\le 0.\end{cases} \tag{42}$$

График $F(x)$ изображен на рис. 40, при $x > 0$ он напоминает перевернутый график плотности $f(x)$ и при $x \to +\infty$ выходит на асимптоту $y = 1$.

Числовые характеристики непрерывной случайной величины $X \in E(\lambda)$ определяются по параметру распределения λ по формулам:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}; \tag{43}$$

$$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}; \tag{44}$$

$$\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}. \tag{45}$$

Экспоненциальное распределение имеет четко выраженную асимметрию $\mu_3 > 0$ («хвост справа»), а коэффициент асимметрии для него $\alpha_3 = 2$.

Коэффициентом вариации неотрицательной случайной величины X называется величина $v_x = \sigma_x/m_x$, т. е. отношение среднего квадратического отклонения (σ_x) к математическому ожиданию (m_x). Коэффициент вариации показывает, какую долю математического ожидания составляет σ_x, и служит *характеристикой «степени случайности» неотрицательной случайной величины* X.

Случайные величины с $v_x < 1$ «менее случайны», чем случайные величины с $v_x > 1$. Экспоненциальное распределение в этом смысле является *эталонным*, так как для него

$$v_x=\frac{\sigma_x}{m_x}=\frac{1/\lambda}{1/\lambda}=1. \tag{46}$$

Экспоненциальное распределение используется в *теории массового обслуживания* (временной интервал между двумя заявками имеет распределение типа $E(\lambda)$). Правда, поток заявок должен при этом быть простейшим (стационарным пуассоновским). Применимо экспоненциальное распределение и в *теории надежности* (время работы изделия до выхода из строя во многих случаях имеет распределение типа $E(\lambda)$). При этом интенсивность отказов λ должна быть постоянной.

При решении задач в данной главе будет использоваться только простейший случай экспоненциального распределения $X \in E(\lambda)$, описанный выше. Существует, однако, и более общий случай экспоненциального закона, описываемый двумя параметрами: *интенсивностью* λ и *сдвигом* θ: $X \in E(\lambda, \theta)$. Отличие от простейшего варианта состоит в сдвиге графиков $f(x)$ и $F(x)$ из точки $x = 0$ в точку $x = \theta$ с сохранением их формы (рис. 41 и 42).

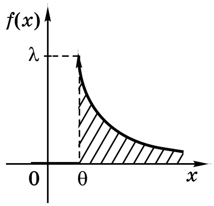

Рис. 41

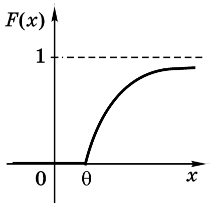

Рис. 42

Если непрерывная случайная величина X принадлежит множеству $E(\lambda, \theta)$ экспоненциально распределенных случайных величин, описываемых двумя параметрами, то для нее плотность вероятности и функция распределения имеют вид

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(x-\theta)} & \text{при} \quad x>\theta;\\ 0 & \text{при} \quad x\le\theta;\end{cases} \tag{47}$$

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda\,(x-\theta)} & \text{при} \quad x>\theta;\\ 0 & \text{при} \quad x\le\theta,\end{cases} \tag{48}$$

а числовые характеристики принимают значения:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}+\theta; \quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}; \tag{49}$$

$$\alpha_3 = 2; \quad \alpha_4 = 6. \tag{50}$$

7.3. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Нормальный закон распределения (иногда называемый *законом Гаусса*) исключительно важен и занимает особое место в теории вероятностей. Очень многие случайные величины на практике распределены нормально.